

SOFTWARE PARA LA APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA INGENIEROS AGRÓNOMOS

Amaury Rondón Aguilar¹, Idelfonso Rivero la Rosa², Dinalvis Atencio Yero³

¹ Licenciado en Matemática, profesor asistente de la carrera Ingeniería Agrónoma, CUM Media Luna, Universidad de Granma, Cuba, arondona@udg.co.cu

² Licenciado en Educación en la especialidad de Matemática, Máster en ciencia de la educación y profesor auxiliar de la carrera Ingeniería Agrónoma, CUM Media Luna, Universidad de Granma, iriveror@udg.co.cu

³ Licenciada en Educación en la especialidad de Informática, profesora de la ESBU "Pedro de Céspedes del Castillo" municipio Media Luna, Granma, dinalvis@sbpcml.gr.rimed.cu

RESUMEN

La presente investigación surge una vez que se detecta a través del diagnóstico inicial realizado a un grupo de 28 estudiantes del curso por encuentro del Centro Universitario Municipal del municipio de Media Luna de la provincia Granma, el poco dominio de las operaciones aritméticas, suma, resta y multiplicación de números racionales, las cuales constituyen una herramienta indispensable para la resolución de problemas que se vinculan a la esfera social y profesional del Ingeniero Agrónomo.

Al desarrollar con profundidad en este trabajo aspectos importantes de estas operaciones aritméticas indispensables, se vinculan directamente los métodos de Gauss y Cramer a la resolución de problemas. El empleo de estos métodos es un elemento principal que deben dominar en esta enseñanza, pues los mismos implícitamente utilizan estas operaciones en todo momento.

La implementación de los aspectos desarrollados en la investigación además de contribuir y favorecer el proceso enseñanza - aprendizaje de las operaciones aritméticas en la asignatura Álgebra Lineal de la disciplina Matemática en dicha carrera, permitió un aumento de un 45.01% a un 78.57%. Con el dominio de estas operaciones los estudiantes desarrollaron habilidades que les permitieron resolver los distintos problemas planteados, vinculados a su profesión y aprender a interpretar los resultados obtenidos de cada problema. En la presente investigación se desarrolló un software que facilita el aprendizaje de la aplicación de las operaciones aritméticas en la resolución de problemas para ingenieros agrónomos. Se demostró en los resultados que la muestra desarrolló una mayor motivación por la asignatura y la carrera que estudian. Además de un aumento en el nivel de conocimientos que es un aspecto vital en la enseñanza de las Matemáticas.

Palabras claves: Operaciones aritméticas, resolución de problemas, minuendo, sustraendo, sumandos.

INTRODUCCIÓN

La aritmética es la más antigua y elemental de las ramas de las Matemáticas, se utiliza en casi todo el mundo, desde las tareas cotidianas hasta los más avanzados cálculos científicos. Desde la prehistoria, en que la aritmética se limitaba al uso de números enteros, aparecen inscripciones en objetos que indican una clara concepción de la suma y la resta. (Capote-Jaume, M & Cantón-Arenas J. 2014)

Por la historia se conoce que los antiguos egipcios utilizaban símbolos para la adición y la igualdad, por su parte los griegos, hindúes y árabes tenían símbolos para la igualdad y las incógnitas, en esos tiempos las operaciones matemáticas solían ser bastante engorrosas debido a la falta de signos apropiados.

Los signos “+” y “-” para indicar las operaciones de adición y sustracción fueron usados por primera vez en 1489 por el matemático alemán Johannes Widman, quien dirigió toda su obra a la aplicación del cálculo aritmético en la actividad cotidiana. Vivimos rodeados de números y es una necesidad constante el trabajar aritméticamente con ellos. (Ibañez, R. 2016)

Pensar, razonar, resumir, comparar, clasificar e interpretar datos son esencialmente habilidades del pensamiento que todo sujeto debe desarrollar; sin embargo, pese a que debe ser fundamental para que el aprendizaje esté bien cimentado, no se refleja en las diversas áreas del conocimiento y principalmente en las matemáticas. (Mastachi, M. 2015)

El conocimiento matemático que se genera en la escuela, además de estar fundamentado en el proceso de construcción, debe posibilitar tanto comprensión de los conceptos, formas de representación y uso de lenguaje, así como reconocimiento de su utilidad en contextos y situaciones específicas y debe brindar elementos para explicar o sustentar no sólo los procedimientos; sino también la pertinencia de las decisiones tomadas. (Bertel, J.& Barboza, J. 2018)

Los programas educativos en el nivel superior, consideran experiencias educativas motivadoras e interrelacionan asignaturas con el objetivo de desarrollar habilidades cognoscitivas que desarrollan el pensamiento lógico, lo que nos permite enseñar a los estudiantes a razonar, a resumir, a comparar, a clasificar, a interpretar datos, etc. Es indispensable fomentar en los estudiantes una buena base en su educación desde edades tempranas para lograr que al llegar al nivel superior cuenten con las habilidades necesarias para iniciar una carrera universitaria.

Estas operaciones aritméticas no solo se utilizan en las asignaturas relacionadas con la disciplina Matemática, sino que dentro del plan de estudio de la carrera existen varias asignaturas en las que deben utilizar estas operaciones por lo que desarrollar habilidades en el dominio de las mismas desde su primer año les facilitarán la comprensión de estas diversas materias.

La resolución de problemas permite que el estudiante encuentre sentido y utilidad a lo que estudia, al proponer alternativas de solución a las situaciones problemáticas que lo rodean. (Mastachi, M. 2015)

Una vez que se aplica el diagnóstico inicial a los estudiantes tomados como muestra, basado en el dominio y aplicación de las operaciones aritméticas, suma, resta y multiplicación, nos percatamos que tienen poco dominio al resolver con total exactitud todos los ejercicios, lo que nos permitió percatarnos de la necesidad de pensar una manera que les permita adquirir o refrescar estas operaciones pues constituyen la herramienta fundamental para resolver los problemas vinculados con su profesión, los cuales se modelan para su resolución a través de los métodos de Gauss y Cramer.

Por tal motivo se propone como objetivo general de la presente investigación fortalecer el proceso de enseñanza - aprendizaje de las operaciones aritméticas en la resolución de problemas propios de la especialidad Ingeniería Agrónoma a través de los métodos de Gauss y Cramer, mediante de una serie de ejercicios que permitan la aplicación de las mismas al cotidiano desempeño de estos futuros profesionales.

Metodología.

Actualmente con el uso de medios auxiliares de cálculo y las computadoras, es posible realizar una gran cantidad de operaciones matemáticas con rapidez y absoluta confiabilidad, para un uso provechoso de esta novedosa tecnología es fundamental el conocimiento de los conceptos, leyes y procedimientos matemáticos que seamos capaces de dominar, es por ello que es de vital importancia la preparación en estos contenidos tan valiosos para nuestro desempeño social. (Acosta *et al.*, 2013)

Onrubia, Rochera y Barberá (2001) proponen que en el conocimiento matemático se pueden considerar aspectos abstractos y concretos, uno al ser representados a un nivel cognoscente y el otro al ser aplicados en el mundo real. Esta dualidad hace que se pueda hablar de dos tipos distintos de significados relacionados con el contenido matemático; uno interno, formal, puramente matemático, y otro externo, referencial, que vincula al sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos del mundo real.

Piaget, J. (1967) enfatiza las acciones físicas y la experiencia con el ambiente como básicas para el desarrollo cognoscitivo temprano. (...) El desarrollo cognoscitivo ocurre no sólo por medio de la construcción de nuevos esquemas, sino también por la diferenciación e integración de los esquemas existentes.

Existen elementos esenciales que componen una adición y una sustracción y es necesario antes de realizar cualquier procedimiento recordar cómo se denominan estos elementos.



También es importante conocer que la sustracción de números naturales o fraccionarios solo tendrá solución cuando el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.

Adición.

Sobre los procedimientos para adicionar dos números racionales, se pueden considerar dos casos, atendiendo a los signos de los sumandos.

Primer caso:

Los dos sumandos tienen signos iguales, ya sean ambos positivos o negativos.

Se debe tener en cuenta que: Para adicionar dos números positivos se utiliza el mismo procedimiento de la adición de números fraccionarios.

Segundo caso:

Los dos sumandos tienen signos diferentes, es decir, un sumando es positivo y el otro es negativo.

Para adicionar dos números racionales con signos diferentes:

Se sustrae del mayor módulo de estos números el menor.

Al resultado se le pone el signo del número de mayor módulo.

Ejemplo:

Calcula: $-23 + 15 = -8$

$3 + (-5)$ b) $-8 + 10$ c) $-7,5 + 6$

Solución:

$3 + (-5)$

Se sustraen del mayor módulo de estos números el menor:

$5 - 3 = 2$ ($5 > 3$)

Se pone al resultado el signo del número que tiene mayor módulo (en este caso "-") $3 + (-5) = -2$, el resultado es negativo porque el sumando que tiene mayor módulo es negativo.

Es importante recordar que:

La suma de dos números racionales opuestos es igual a cero.

Si los dos números tienen signos iguales, se adicionan sus módulos y al resultado se le coloca el mismo signo.

Si los dos números tienen signos diferentes, se sustrae del que tiene mayor módulo el de menor módulo y al resultado se lo atribuye el signo del número que tiene mayor módulo.

Sustracción.

Para sustraer un número racional de otro, se adiciona al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo:

Calcula

3 - 7 b) -5 - 2 c) -3 - (-4)

Solución:

Se transforma la sustracción en una adición.

El opuesto de 7 es -7

Se efectúa la adición aplicando el procedimiento estudiado para la adición de números racionales con signos diferentes.

$$-5 + (-2) = -7$$

Importante:

La sustracción de números racionales siempre puede realizarse.

En el conjunto de los números racionales, la sustracción es la operación inversa de la adición y puede efectuarse sin restricción, adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo.

En la práctica para sustraer un número racional de otro se procede directamente interpretando cada caso como una adición.

En lo adelante en la presente investigación, a la adición o sustracción de números racionales (independientemente de los signos que tengan sus términos) se le denominará, *suma algebraica* y servirá de mucho para hallar el antecesor y sucesor de un número entero.

La notación en forma de suma algebraica simplifica la escritura de los sumandos pues no es necesaria la utilización de paréntesis.

Para efectuar esta suma algebraica se debe aplicar la forma más ventajosa.

La sustracción de números racionales es la operación inversa de la adición.

Por ejemplo, calcular la sustracción de $5 - 8$ equivale a encontrar un número racional x tal que, $x + 8 = 5$; este número es -3 ; $5 - 8 = -3$; ya que $-3 + 8 = 5$.

Hallar el valor de x que satisface la igualdad

$$X + 5 = 3$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ \downarrow \\ X = 3 - 5 \\ X = -2 \end{array}$$

Miembro izquierdo

Comprobación

Miembro derecho

$$-2 + 5 \text{ Comparación } 3 = 3$$

3

$$= 3$$

$$\text{Luego: } x = -2$$

La sustracción es la operación inversa de la adición y en el conjunto de los números racionales puede efectuarse sin restricción, adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo para pasar a ser una suma algebraica.

Multiplicación de números racionales.

El resultado de multiplicar dos números racionales es un número racional único y se llama producto. A continuación, se presenta el procedimiento para la multiplicación de números racionales.

Para multiplicar dos números racionales:

Se multiplican los módulos.

Si los factores tienen signos iguales, el producto es *positivo*; si los factores tienen signos *diferentes*, el producto es *negativo*.

Si uno de los factores es cero, el producto es cero.

Propiedades de la multiplicación de números racionales

- **Propiedad conmutativa** de la multiplicación de números racionales:

$$\text{Para todo } a, b \in \mathbb{Q}; \quad a \cdot b = b \cdot a$$

- **Propiedad asociativa** de la multiplicación de números racionales:

$$\text{Para todo } a, b, c \in \mathbb{Q}; \quad a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- **Propiedad distributiva** de la multiplicación de números racionales:

$$\text{Para todo } a, b, c \in \mathbb{Q}; \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Se debe recordar que:

Un producto de números racionales es *positivo* si la cantidad de factores negativos es *par*, y es *negativo* si la cantidad de factores negativos es *impar*.

En la multiplicación:

Si los dos números tienen signos iguales, se efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale signo positivo.

Si los dos números tienen signos diferentes se efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale el signo negativo.

La Resolución de Problemas.

Desde la educación matemática, se ha reflexionado y comprendido que la solución de problemas juega un papel muy importante en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la aritmética, por lo que es necesario promover en los estudiantes, desde los primeros niveles de escolaridad, las estrategias necesarias para que trabajen desde este enfoque. Presentar una planeación didáctica desde la resolución de problemas según estos razonamientos, implica diseñar experiencias pedagógicas, que le permitan a los estudiantes interactuar en el descubrir de las características de los objetos que se encuentran a su alrededor y la manera como puede relacionarlos con una situación planteada. Es de destacar que el proceso de resolución de problemas es muy común en el enfoque de la matemática actual y constituye un aspecto importante en la formación de un ingeniero agrónomo. (Bertel, J.& Barboza, J. 2018)

Para López (2000), la solución de problemas potencializa la asimilación de nuevos conocimientos y permite establecer una relación entre la sociedad y el medio ambiente. La enseñanza de los problemas, proporciona la adquisición de los conocimientos matemáticos, lo que propicia que el estudiante se oriente en el mundo, lo comprenda y se apropie de puntos de vista particulares (simbolización) de los objetos, hechos y fenómenos en el lenguaje propio de las matemáticas (Cruz, M. 2002).

Según Castro y Rico (1999) los problemas aritméticos elementales, son aquellos en los que se involucran para su solución operaciones aritméticas (especialmente suma, resta, multiplicación y división). Los problemas aritméticos elementales representan situaciones que se resuelven, utilizando procedimientos en una o varias etapas y diversas estrategias y procesos de pensamiento que van de acuerdo a su nivel de complejidad.

En las matemáticas, la resolución de problemas es la culminación del aprendizaje, ya que la aplicación adecuada de las operaciones aritméticas, nos llevará al resultado correcto y nos ayudará a tomar decisiones. (Mastachi, M. 2015)

Método Heurístico

Se basa en la utilización de reglas empíricas para poder solucionar problemas. El método heurístico conocido como IDEAL, incluye cinco pasos: Identificar el problema, Definir y presentar el problema, Explorar las estrategias viables, Avanzar en las estrategias, Lograr la solución y volver para evaluar los efectos de las actividades. (Mastachi, M. 2015)

Para Mastachi (2015) el matemático Polya también formuló un método heurístico para resolver problemas que se asemeja mucho al ciclo utilizado para programar computadoras en el intervienen cuatro operaciones mentales:

Entender el problema.

Trazar un plan.

Ejecutar el plan (resolver).

Revisar.

La resolución de problemas es la vía fundamental que se utilizará en los ejercicios que enfrentarán los estudiantes para su vinculación con la profesión y en ellos hay que considerar que el grado de dificultad siempre es ascendente, lo que logrará que los mismos se motiven en la profundización de la asignatura. Los ejercicios a que se enfrentarán los estudiantes en su mayoría serán sobre la resolución de problemas vinculados con su especialidad como una forma de desarrollar habilidades y capacidades en los mismos, es decir, que el aprendizaje mediante la resolución de problemas tiene que cumplir con las funciones: instructivas, educativas y de desarrollo al igual que en la resolución de ejercicios de matemática.

El procedimiento para la resolución de problemas de dos ecuaciones con dos variables y de tres ecuaciones con tres variables, no siempre es fácil y se requiere de una buena práctica. Con vistas a la resolución de problemas les ofrecemos las siguientes sugerencias:

- Lee cuidadosamente el problema cuantas veces sean necesarias para comprender perfectamente la situación que se plantea.
- Determina los datos y las incógnitas.
- Busca en el problema las relaciones o combinaciones existentes que te permitan formular las ecuaciones.
- Resuelve las ecuaciones obtenidas.
- Comprueba la solución directamente en el enunciado del problema, nunca en las ecuaciones.
- Formular la respuesta.

La apropiación de las sugerencias que se ofrecen, preferentemente en este mismo orden, le permitirá al estudiante resolver cualquier problema de dos con dos y tres con tres al que se enfrente independientemente de la complejidad del mismo.

Teniendo en cuenta que los estudiantes universitarios a los que está dedicada esta investigación pertenecen al Curso por Encuentro y en su mayoría llevan varios años desvinculados de los estudios, es de gran utilidad y beneficio tanto para los profesores como para ellos mismos recordar estos contenidos que les fueron impartidos por primera vez en la enseñanza secundaria. Teniendo presente que esta asignatura es de poco agrado para muchos de ellos en casi todos los niveles de enseñanza, dominar estas operaciones aritméticas les facilitaría la comprensión en mayor medida de esta asignatura.

Los problemas que resolverán en clases, en su mayoría vinculados a su profesión serán modelados a través de Sistemas de Ecuaciones Lineales los cuales pueden tener n-ecuaciones con n-incógnitas, por lo que la adquisición de habilidades en la aplicación de estas operaciones aritméticas será vital para poder dominar los métodos de Gauss y Cramer que son los que se estudian en este nivel de enseñanza y su dominio les garantizará una exitosa comprensión de los mismos y una eficaz resolución de los problemas planteados.

Software propuesto.

El software propuesto para facilitar el aprendizaje de la aplicación de las operaciones aritméticas en la resolución de problemas para ingenieros agrónomos tiene un diseño sensible con una pantalla inicial que permite el acceso a cada una de las funcionalidades implementadas, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Figura 1: Pantalla inicial del software

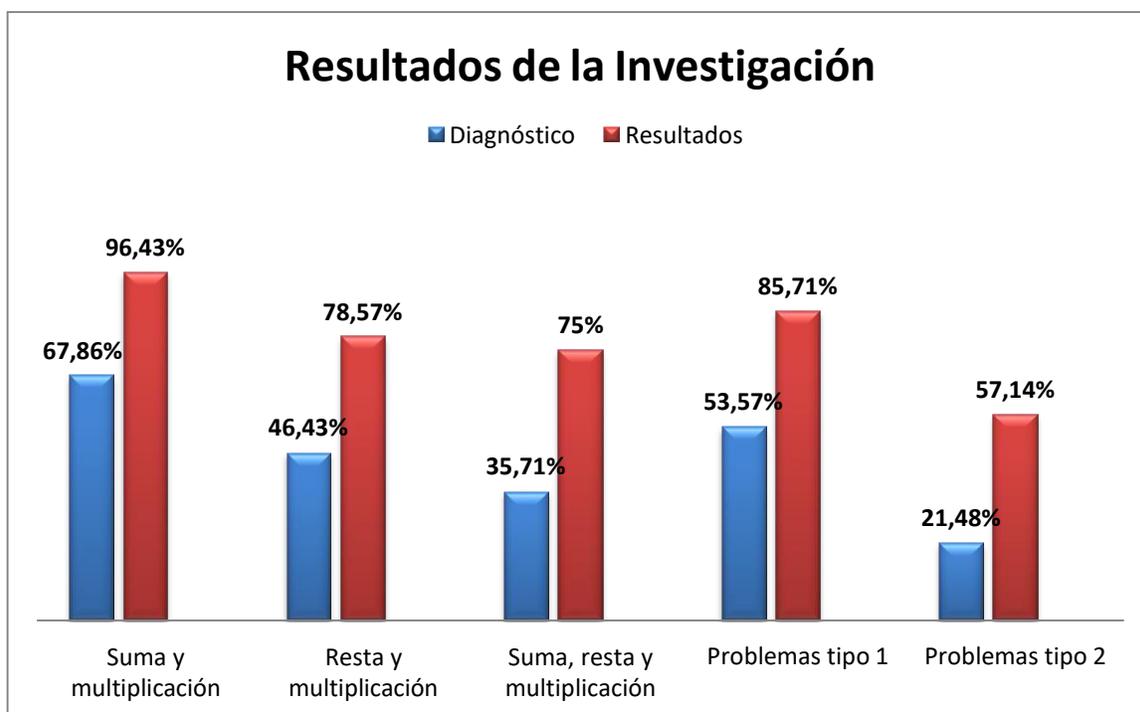
La aplicación cuenta con un manual de ayuda para principiantes, bibliografía de apoyo, una galería de imágenes relacionada con el contenido y un sistema de ejercicios que permite la autoevaluación por parte de los estudiantes.

Como base para el diseño se tomó la plantilla de las presentaciones elaborada por la Dirección de comunicación Institucional de la Universidad de Granma. El software se realizó, con el lenguaje Visual Basic, siguiendo un proceso de desarrollo iterativo e incremental, con la participación, como cliente, del coordinador de la carrera de Agronomía del Centro universitario Municipal de Media Luna.

Resultados

Para obtener información sobre el aprendizaje de los alumnos del primer año de la carrera de Ingeniería Agrónoma del Centro Universitario Municipal de Media Luna provincia Granma, en relación a las operaciones básicas de aritmética y su aplicación en la resolución de problemas, visualizaremos a través de una tabla y un gráfico los resultados obtenidos en el diagnóstico inicial y los resultados después de aplicar la investigación.

Conceptos	Diagnóstico	Resultados
Suma y multiplicación	67,86%	96,43%
Resta y multiplicación	46,43%	78,57%
Suma, resta y multiplicación	35,71%	75,00%
Problema 1	53,57%	85,71%
Problema 2	21,48%	57,14%



En el diagnóstico inicial aplicado a esta muestra de estudiantes debían resolver 5 ejercicios de ellos tres eran combinaciones de las operaciones aritméticas y dos eran problemas, el problema 1 era resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos con dos y el problema 2 era un sistema de ecuaciones lineales de tres con tres.

Después de utilizar el software propuesto, todos los aspectos mejoraron, pero en el problema 2 que era resolver un sistema de tres con tres todavía muestran un porcentaje bajo de aprovechamiento.

Hablando del incremento en los porcentajes, se logró un aumento del 33,56% al resolver las operaciones combinadas y los problemas orientados.

Separando: las combinaciones de operaciones básicas nos arrojan un aumento del 33,33% lo que indica que más estudiantes pudieron resolverlas y en la solución de los problemas se mejoró sustancialmente

un 33,9%, ya que en los del tipo 1 se logró casi un 86%, después de aplicada la investigación.

Se puede concluir que los aspectos que más dominan los estudiantes son la suma y multiplicación, así como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos con dos los cuales pertenecen a los problemas del tipo 1.

La resta es lo contrario de la suma, pero los estudiantes no aplican este conocimiento al tratar de resolverla, esto explica el bajo porcentaje de estudiantes que pudieron efectuarla con precisión. A su vez, la sustracción es base fundamental para poder realizar las divisiones, es parte del algoritmo junto con la multiplicación.

Los estudiantes de primer año del grupo de agronomía ya cuentan con la madurez suficiente para poder resolver problemas vinculados con su profesión utilizando los métodos de Gauss y Cramer, durante la aplicación de la investigación mostraron interés al tratar de solucionar los retos propuestos, aunque algunos mostraban dificultad al resolver ejercicios donde aparecieran las operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación.

Los estudiantes al encontrar sentido a lo que están aprendiendo, se motivan y son más receptivos para tratar de entender nuevos conceptos y los desafíos que se les presentan los invitan a razonar y a reflexionar para descubrir de qué manera solucionarán los problemas propuestos.

Discusión.

Al observar los resultados de la investigación realizada partiendo desde el diagnóstico inicial de la asignatura, aplicado a la muestra tomada para la presente, se pudo determinar el poco dominio que mostraban los estudiantes de la utilización de las operaciones aritméticas. Este diagnóstico estaba conformado por 5 preguntas, la primera trataba sobre una operación combinada de suma y multiplicación de números racionales, la segunda sobre resta y multiplicación de números racionales, la tercera sobre la combinación de suma, resta y multiplicación de números racionales, la cuarta era un problema sencillo relacionado con su especialidad el cual se modelaba a través de un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y la quinta pregunta trataba también de un problema, esta vez un poquito más complejo vinculado con su esfera social y el mismo se modelaba a través de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas. Como se mencionaba con anterioridad se evidencia el poco conocimiento de los futuros ingenieros agrónomos en cuanto al conocimiento y habilidades de las temáticas relacionadas con las operaciones aritméticas y la forma de cómo se deben utilizar para resolver problemas propios de la especialidad, siendo esto una deficiencia que puede comprometer su preparación como futuros profesionales competentes.

Una vez que detectamos estas insuficiencias nos proponemos proveer a los estudiantes de las herramientas necesarias que le permitan recordar la correcta utilización de estas operaciones aritméticas, ya que cuentan con una pequeña base que recibieron en la enseñanza secundaria, así como cada una de las propiedades fundamentales de ellas que les permitan adquirir las habilidades y puedan avanzar en este sentido.

Las elaboraciones de diversas guías de ejercicios de diferentes enfoques les permitirán ejercitar los contenidos adquiridos y podrán valorar e interpretar los resultados obtenidos de los diferentes problemas que resuelvan siempre estos relacionados con su futura profesión.

Los autores llegaron a la conclusión de que se logró la meta trazada a través de esta investigación, pues se pudo apreciar como aumentan los índices de porcentajes en cada una de las variantes tratadas desde el punto de vista de las operaciones aritméticas en cuestión y la resolución de problemas utilizando estas operaciones.

Conclusiones

Se puede apreciar que con el desarrollo de esta investigación y su aplicación en el grupo de Ingeniería Agrónoma tomado como muestra, se logró un avance notable en cuanto a la interpretación y resolución de los problemas aplicados a su especialidad con la utilización de las operaciones aritméticas desarrolladas en este trabajo que se aplican directamente en los métodos de Gauss y Cramer. La implementación de esta investigación en el currículo de esta carrera favorecerá el proceso de enseñanza aprendizaje de los métodos de Gauss y Cramer en la disciplina Matemática, especialmente en la asignatura de Álgebra Lineal, aspecto que constituye un logro en el desempeño profesional de estos estudiantes.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, S., Gort, M., Quintana, A., Báez, L., García, L., González, C., Cantero, R., Cantón, J. (2013). *Matemática 7mo grado*. Editorial Pueblo y Educación. ISBN 978-959-13-2629-4.
- Bertel, J., Barboza, J. (2018). Pensamiento Aritmético en Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre. *Form. Univ.* vol.11 no.2 La Serena, versión On-line ISSN 0718-5006. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200013>.
- Capote-Jaume, M y Cantón-Arenas J. (2014). Operaciones con números naturales y fraccionarios. <http://matematica.cubaeduca.cu/02-operaciones-con-numeros-naturales-y-fraccionarios>
- Castro, E, y Rico, L. (1999). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá, Colombia: Editorial Una empresa docente.
- Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de las matemáticas*. Tesis Doctoral. Instituto Superior Pedagógico de Holguín "José de la Luz y Caballero", Facultad de Educación.
- Ibañez, R. (2016). El origen de los signos matemáticos - Cuaderno de Cultura Científica. Matemoción Blog de la [Cátedra de Cultura Científica](#) de la [UPV/EHU](#) - ISSN 2529-8984 - Editado en Bilbao <https://feeds.feedburner.com/CuadernoDeCulturaCientifica>.
- Mastachi, M. (2015). *Aprendizaje de las Operaciones Básicas en Aritmética a través de la Resolución de Problemas*. Universidad Veracruzana.
- Onrubia, J., Rochera, M., Barberá, E. (2001). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios, A. Marchesi (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación*.(pp. 487-508). Madrid: Alianza.
- Piaget, J. (1967). *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.